

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

S 139 (M 48)

Toets tegen verloop voor een aantal kansen

A. Benard
en
Constance van Eeden



Statistische Afdeling
Rapport S 139 (M 48)
door
A. Benard
en
Constance van Eeden.

Toets tegen verloop voor een aantal kansen.¹⁾

Deze toets kan worden toegepast in het volgende geval:
 $R_i (i = 1, 2, \dots, k)$ zijn k onafhankelijke reeksen van onafhankelijke experimenten, waarbij ieder experiment één der mogelijke uitkomsten: succes of mislukking heeft. Bestaat de i^{e} reeks uit t_i experimenten, treedt hierbij n_i maal de uitkomst: succes op en stellen wij $m_i = t_i - n_i$, dan kunnen wij de resultaten als volgt samenvatten:

reeks no.	aantal malen		aantal experimenten
	succes	mislukking	
1	n_1	m_1	t_1
2	n_2	m_2	t_2
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
k	n_k	m_k	t_k
totaal	n	m	N

Hierin zijn n_i en m_i ($i = 1, 2, \dots, k$), n en m stochastisch, terwijl t_i ($i = 1, 2, \dots, k$) en N gegeven getallen zijn.

Is nu bij ieder experiment van de i^{e} reeks de kans op succes p_i (en dus de kans op mislukking $q_i = 1 - p_i$), dan luidt de hypothese H_0 , die we willen toetsen:

$$H_0 : p_1 = p_2 = \dots = p_k,$$

terwijl de alternatieve hypothesen inhouden, dat $p_1, p_2, \dots, p_k$ in deze volgorde een stijgend of dalend verloop vertonen.

De toets wordt nu voorwaardelijk uitgevoerd onder de voorwaarde dat n en m de bij het experiment gevonden waarden n en m aannemen.

Wij kunnen nu de N waarnemingen opvatten als n waarnemingen van een stochastische grootte x en m van een stochastische

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

grootheid y , waarbij x en y beide een discrete verdeling bezitten en de waarden $1, 2, \dots, k$ aannemen. In de twee steekproeven heeft x n_i maal de waarde i aangenomen, terwijl bij y deze waarde m_i maal is opgetreden.

Stellen we nu de kans dat x de waarde i aanneemt p_i' en de kans dat y deze waarde aanneemt p_i'' dan geldt, als H_0 juist is

$$p_i' = \frac{t_i}{N} \qquad p_i'' = \frac{t_i}{N}, \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

dus:

$$p_i' = p_i'' \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

en dit kunnen we toetsen door de toets van WILCOXON (zie memorandum S 47 (M 7)) toe te passen op de twee steekproeven van x en y . Omgekeerd geldt ook dat, als $p_i' = p_i''$ voor iedere i , de hypothese H_0 vervuld is.

Indien de kansen $p_1, p_2, \dots, p_k$ een stijgend verloop vertonen, dan zullen wij bij de waarnemingen van x weinig kleine en veel grote vinden, terwijl bij die van y veel kleine en weinig grote zullen optreden, zodat dus de twee steekproeven van x en y systematisch zullen gaan verschillen. Hieruit zien we dat de alternatieve hypothesen waartegen wij H_0 willen toetsen overeenstemmen met de alternatieven van de toets van WILCOXON, zodat dus een verloop in de p 's inderdaad door toepassing van de toets van WILCOXON aangetoond zal kunnen worden.

Opmerking.

Men kan gemakkelijk bewijzen dat de bovenbeschreven toets voor de hypothese

$$H_0 : p_1 = p_2 = \dots = p_k$$

identiek is met de door T.J.TERPSTRA gegeven toets tegen verloop voor groepen waarnemingen (zie memorandum S 73 (M 28) en de opgegeven literatuur), waarbij dan iedere reeks R_i een groep van waarnemingen is, die ieder de waarde 0 of 1 bezitten.

Literatuur.

Terpstra, T.J., The asymptotic normality and consistency of Kendall's test against trend, when ties are present in one ranking, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet., A 55 (1952).